変位関数を用いた非定常クリープ問題に関する研究

著者	畑 俊明
号	347
発行年	1977
URL	http://hdl.handle.net/10097/11296

氏名	畑 俊明（はた としあき）
授与学位	工学博士
学位授与年月日	昭和52年9月7日
学位授与の根拠法規	学位規則第5条第2項
最終学歴	昭和42年3月 東北大学大学院工学研究科機械工学第二専攻 修士課程修了
学位論文題目	**変位関数を用いた非定常クリープ問題に関する研究**
論文審査委員	東北大学教授 渥美 光　東北大学教授 横堀 武夫 東北大学教授 玉手 統　東北大学教授 斎藤 秀雄 東北大学教授 八巻 昇

論文内容要旨

第1章 序 論

金属のクリープ問題は，多くの研究者により多方面の角度から研究されて来たが，近年，宇宙工学と原子力工学を中心とする科学技術の発展につれて，各種の機械，構造物の高温強度が問題視されるにおよび，特に，工学上きわめて重要な研究課題となった。

クリープの研究分野には，大別して，材料のクリープ挙動を究明する分野と，既知の挙動特性を用いて，構造物，機械要素等のクリープ挙動を数理的に解析する分野とがある。

クリープの数理解析は，初期には，定常クリープの研究であったが，耐クリープ材料の最近の開発の進展は，設計の条件を，低応力長時間クリープから高応力短時間クリープへと移行させ，このため非定常クリープに対する応力，変形の解析が重要視されるにいたった。

非定常クリープは，定常クリープにいたる過渡的な段階で，この段階の最初と最後の過程では，物体内の応力分布が変わるため物体内の応力が外力によって一義的に定まるとする定常クリープの場合の解析方法の適用は困難である。このため，非定常クリープ状態にある物体の応力解析に関して，多くの理論研究が行なわれた。その1つに，微小時間区分の概念の導入である。これは定常クリープに達するまでの時間を，微小時間に分割し，この微小時間区分内のクリープひずみ速度，応力を一定とみなして解析する方法である。この方法では，微小時間区分内のクリープひずみによる物体の応力解析は，増分ひずみの生ずる弾性体の応力解析と全く同一となり，微小変形の弾性論を用いて解が求められる。結局，時間区分を行なって，非定常クリープ問題を線形弾性論を用いて解析する方法である。特に，最近の電子計算機の発展に伴ない，この理論を基礎とする解析法が非定常クリープの研究分野の主流を占めている様に思われる。

しかし，実際には，微小時間区分内で取扱う増分ひずみの弾性問題の解析は，数学的な困難さが隘路となって，従来，必ずしも容易なものではなく，この問題に対する解析法を確立することが非定常クリープ問題の重要な課題となっている。

以上の見解にもとづき，本論文では，従来，あまり手がつけられていなかった非定常クリープ問題の解析に関して，熱応力問題の解析に用いられるGoodier の解法を拡張して解を求める方法を発案し，詳細に研究した結果，4個の変位関数を導入すれば，容易に特解が求まることを見い出した。この解法の特長は，特解による応力が境界条件を満足しない場合，微小変形の弾性論による解を重ね合せて解を求めることにある。

この解法により，二次元，三次元問題，熱応力問題等の特に応力集中が問題になる諸分野のクリープ解析を行ない工業的に価値のある資料を提供した。

本論文は2部より成る。すなわち，第1部の「非弾性ひずみによる変形の基礎式」と第2部の「クリープ問題の解析」である。ここで述べる非弾性ひずみとは，熱ひずみ，塑性ひずみ，クリープひずみ等を包括するものである。

以下にその内容を概説する。

第1部　非弾性ひずみによる変形の基礎式

第2章　非弾性ひずみによる変形の力学

本章では，第1章の序論につづき，第2節で，Lin, Reissner によるDuhamel 類似の拡張による解析法の紹介を行なった。ここに，Duhamel 類似とは，熱弾性問題を解析する際に用いられる方法で，直接熱応力問題を考えるかわりに仮想体積力及び仮想表面力が作用する等温弾性問題を解く方法である。しかし，この方法では，解析が特に容易になる訳ではない。

そこで，第3節では，やはり，熱弾性問題の解法の1つで，変位成分に関する熱弾性変位ポテ

ンシャルという1つの関数を利用し，熱応力問題を等温弾性問題に帰着させる，いわゆる，Goodier の解法の非弾性ひずみ問題への適用性の検討を行なった。

この場合，非弾性ひずみ問題に対するNavier の式は，次式で与えられる。

$$\triangle u_i + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ji} - 2e''_{ij,j} - \frac{2\nu}{1-2\nu} e''_{,i} = 0 \quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3) \tag{1}$$

ここで，x_i は座標系，u_i は変位ベクトル，e''_{ij} は非弾性ひずみ，ν はポアソン比，かつ，$e''=e''_{jj}$，$\triangle u_i=(u_i)_{,jj}$，また，コンマは，次の文字での微分を表わし，同じ文字の繰返しは，アインシュタイン規約により1から3までの和を表わす。

式(1)の解を求める際に，変位 u_i を，特解 u_i^p と一般解 u_i^s に分離して考える。すなわち，

$$u_i = u_i^p + u_i^s \tag{2}$$

ここに，u_i^p, u_i^s は以下の式を満足しなければならない。

$$\triangle u_i^p + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ji}^p - 2e''_{ij,j} - \frac{2\nu}{1-2\nu} e''_{,i} = 0 \tag{3}$$

$$\triangle u_i^s + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ji}^s = 0 \tag{4}$$

式(3)の特解を求める。そこで，4個の変位関数 Φ_0^p, Φ_1^p, Φ_2^p, Φ_3^p を導入して，u_i^p を次式の様に表示する。

$$u_i^p = 4(1-\nu)\Phi_i^p - (\Phi_0^p + x_j\Phi_j^p)_{,i} \tag{5}$$

式(5)を式(3)に代入すると，Φ_0^p, Φ_i^p が満足しなければならない次の基礎式が導かれる。すなわち，

$$\left.\begin{aligned} \triangle \Phi_0^p &= -\frac{1}{1-2\nu} x_i\left(e''_{ij,j} - \frac{1}{3}e''_{,i}\right) - \frac{1+\nu}{1-\nu} e'' \\ \triangle \Phi_i^p &= \frac{1}{2(1-\nu)}\left(e''_{ij,j} - \frac{1}{3}e''_{,i}\right) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

式(6)が本報で導いた基礎式で，熱応力問題の場合，$e''_{ij}=\delta_{ij}\alpha T$（$\alpha$：線膨張係数，T：温度，$\delta_{ij}$：クロネッカのデルタ）と表示されるので，$\Phi_i^p=0$ となり，Φ_0^p がGoodier の熱弾性変位ポテンシャルとなる。

これは，非弾性ひずみと熱ひずみとの類似性に着目し，熱弾性問題に見られるGoodier の熱弾性変位ポテンシャル解法をクリープ問題に拡張したものである。

また，本章では，式(6)より，二次元問題の基礎式をも導いた。

第3章　非弾性ひずみによる応力の解析

本章では，展開級数の形で非弾性ひずみが規定される場合の二次元問題，三次元軸対称問題の

変位関数型を決定し，非弾性ひずみに対応する応力が，特解として導かれる事を明らかにして，解の体系化を行なった。

第2部　クリープ問題の解析

第4章　クリープの構成方程式

第2部では，非弾性ひずみがクリープひずみである場合の工学的諸問題を解析した。この解析の基礎は，時間区分法を用い，微小時間区分内では，クリープひずみは一定として，微小変形理論の適用を行うことにある。

まず，本章では，クリープひずみと応力に関する構成方程式に関して，単軸定応力クリープ曲線，単軸変動クリープ曲線につき検討し，これを多軸応力状態へ拡張した。また，本報で採用した時間区分法を用いる際の，微小時間区分の選び方と得られた結果を表示する際の無次元時間についても検討を加えた。

第5章　二次元問題の解析

非定常クリープの解析については，最近，二次元問題の解析に差分法，有限要素法の応用，三次元問題の解析には，有限要素法の応用等が見られるが，これらは，まだ，十分な設計資料を与えるにいたっていないのが現状である。

そこで，本章では，変位関数を用いた解析法により，従来，ほとんど解析解を見ない二次元非定常クリープ問題を解き，解法の詳細を論じるとともに，極座標系による二次元問題の解析例として，円板の等温弾性応力による非定常クリープと熱応力による非定常クリープの解析を示した。また，異なる座標系で表わされる多連結境界の二次元問題の解析例として，一円孔を有する矩形板，多角形板を対象に辺点法（point-matching 法）を用いて等温弾性応力，熱応力による非定常クリープ問題の解析を行なった。なお，これらの解析においては，クリープ変形時の応力，熱応力を定量的に求め，クリープ挙動の特性である応力の均一化現象と応力緩和現象を明らかにした。

第6章　積分変換を用いた二次元クリープ問題の解析

本章では，積分変換を必要とする非定常クリープに関する解析に対する本解法の有効性を示した。まず，積分変換を用いて行なう非定常クリープ問題の解析に適用させるため，その基礎方程式を導き，適用の実際を，フーリェ変換を用いて，帯板の非定常クリープ応力解析，非定常クリープ熱応力解析について示し結果を求めて，クリープ変形の挙動特性を明確にした。

第7章　軸対称球のクリープに関する解析

第5，6章に示した解析は，二次元問題に対するものであるが，圧力容器等の問題に関して，三次元問題の非定常クリープ解析は，近年，益々，その重要度を増している。一方，三次元問題の数理解析は数学的な困難さのため，未だに未開拓の分野が多い。

そこで，本解析法を，三次元非定常クリープ問題の解析に適用し，その実際を明らかにするため，本章では，軸対称中空球を対象に，応力及び熱応力の非定常クリープ問題を解き，三次元非定常クリープに関する解析に寄与した。

第8章　短円柱のクリープに関する解析

本章では，第3章で求めた軸対称円柱座標系の基礎式を用いて，中実短円柱が側面に軸対称負荷を受けるクリープ問題を解析し，数値計算を行なった。その結果，弾性応力σ_z，σ_θ はクリープにより著しく変動するが，応力σ_r，τ_{rz}はほとんど変動しないこと等を明らかにした。

第9章　クリープを伴う動的問題の解析

本章では，クリープを伴う動的問題の解析に資するため，慣性項を考慮した動的問題の基礎方程式を求め，これを用いて周期的に変動する温度場にある，円柱，球の非定常クリープ解析を行ない，調和振動型の熱弾性応力がクリープ変形により非調和振動型となる現象を明らかにした。また，急冷された球体のクリープによる残留応力についても検討し，かつ，工学的に価値のある設計資料を提供した。

第10章　異方性中空球のクリープに関する解析

本章では，第3章の解析法を異方性非定常クリープ問題に拡張した。

すなわち，rとθに関する直交異方性中空球を対象に，熱応力のクリープ解析を行ない，詳細な数値計算を行なって，等方性球体のクリープ変形時の応力の挙動との対比から異方性特性を明らかにした。

第11章　総　　括

本論文は非定常クリープ問題に関する研究について述べたものである。すなわち，非定常クリープに対し，著者は4個の変位関数を用いて新しい解析法を提案し，これに従って，基礎式の検討より始め，変位関数型の決定，さらに，これを用いたクリープ問題の解析として，二次元問題，三次元軸対称問題，動的問題，異方性問題について適用性の検討を行なった。

これにより本解析法の有効性が明らかとなり，これらの数値計算の結果は，機械工学，原子炉

工学等に重要な寄与と考えられる。

終りに，終始御懇切なる御指導と御鞭撻を賜わりました東北大学教授　渥美光先生に心から感謝の意を表します。また，有益な御助言を下さいました，東北大学教授　横堀武夫先生，玉手統先生，斎藤秀雄先生，八巻昇先生，大阪府立大学教授　竹内洋一郎先生，静岡大学教授　森岡幹夫先生に厚くお礼申し上げます。

審 査 結 果 の 要 旨

クリープの応力，変形の数理解析は，定常クリープの研究に始まったが，その後耐クリープ材料の開発にともない，非定常クリープの挙動解析が設計上重要な課題となってきた。このため多くの研究が行われたが，いずれも数理解析上の困難さをともない，具体的な問題の解析はほとんど行われていないのが現状である。著者は非弾性ひずみによる変形の基礎式を考察して，変位関数解法を見出し，多軸応力下の非定常クリープ挙動を十分な精度で，数理解析することに成功した。本論文はこれらに関する研究の成果をまとめたもので，2部11章よりなる。

第1章は序論である。第1部第2章は非弾性ひずみによる物体の変形を解析して，これを等価体積力と等価表面力の作用する弾性体の変形におきかえた基礎式を，4個の変位関数を用いて解く簡潔な解法を提唱したものである。第3章には極座標，円柱座標，球座標に対する解を示した。

第2部第4章において著者はクリープの構成方程式を論じ，クリープひずみ速度が，瞬間の温度，応力のみに依存する論拠をもとに，微小時間区分法により，変動応力下のクリープ挙動が，定応力クリープ曲線を用いて解析できることを明らかにした。さらにクリープひずみに対する偏差応力の一義性を考慮して，単軸応力クリープの構成方程式をもとに，多軸応力下のクリープの構成方程式を決定した。また応力あるいは熱応力によるクリープひずみと，対応する応力あるいは熱応力による弾性ひずみの比として無次元時間の関数を定め，応力一定の時間を微小時間区分として，解析上の主要な問題点を簡明に解決した。上述した解法をもとに，第5章に対向パンチを受ける中空円板，局部加熱を受ける中空円板，一軸引張を受ける一円孔を有する矩形板，内圧を受ける円孔を有する多角形板，正多角形板に生ずる熱応力等多数の二次元問題のクリープ解析を行い，クリープによる応力緩和や応力変動の現象を定量的に明らかにした。第6章は積分変換法を用いた二次元クリープ問題の解を，第7章，第8章は軸対称問題のクリープに関する解を述べ，それぞれ興味ある問題を詳細に解析したものである。第9章は変動する温度場にある円柱，球体の非定常クリープの解析を，第10章は異方性中空球のクリープによる熱応力緩和の解析を行ったもので，多くの貴重な成果を得た。第11章は総括である。

以上要するに本論文は，非定常クリープの数理解析に有用な一般解法を提唱し，種々のクリープ問題を具体的に解析して，クリープによる応力，変形の挙動特性を明らかにし，機械・構造物の設計上貴重な資料を提供したもので，得られた知見は機械工学上寄与するところ少なくない。

よって，本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。